Projekt B

Magnus Goltermann (xzb187)
Hold 2

24. maj 2022

1 Opgave 1

a

Bestemmer matricen $\mathbf{A}_a$, som opfylder $T_a(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_x\mathbf{x}$:

$$A_a = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}$$

b

Hvis T_a er bijektiv, så er den både injektiv og surjektiv. For at den er injektiv, må $ker(T) = \{\mathbf{0}\}$ og for at den er surjektiv må $ran(T) = R^m$.
Bestemmer $ker(T)$ ved først at få matricen på reduceret rækkeechelon:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix} - 3r_1 + r_2 \to r_2 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix} - r_1 + r_3 \to r_3 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a-1 \end{bmatrix}$$

$$-r_2 + r_3 \to r_3 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} r_3 \cdot \frac{1}{a} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} r_3 + r_2 \to r_2 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$r_2 + r_1 \to r_1 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - r_3 + r_1 \to r_1 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da der ikke er en fri variabel, må $ker(T) = \{\mathbf{0}\}$, og derfor være injektiv.
Da alle søjler er pivot-søjler i den reducerede rækkeechelon, vil $ran(T)$ være alle søjlerne i A_a:

$$\text{En basis for } ran(T) : \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} \right\}$$

Og her ses det, at $ran(T) = R^3$, som er lig $m = 3$ for matricen A_a, og er derfor surjektiv. Da den både er injektiv og surjektiv, må den være bijektiv.
Bestemmer den inverse T_a^{-1}:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] -3r_1 + r_2 \to r_2 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$-r_1 + r_3 \to r_3 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] -r_2 + r_3 \to r_3 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\frac{1}{a} r_3 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{array}\right] r_3 + r_2 \to r_2 \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3+\frac{2}{a} & 1-\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{array}\right] r_2 + r_1 \to r_1 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -2+\frac{2}{a} & 1-\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ 0 & 1 & 0 & -3+\frac{2}{a} & 1-\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{array}\right]$$

$$-r_3 + r_1 \to r_1 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3+\frac{2}{a} & 1-\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{array}\right]$$

Derfra ses det, at den inverse matrice til T^{-1} er bestemt til:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3+\frac{2}{a} & 1-\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{2}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

Og den lineære transformation T^{-1} kan derfra bestemmes til

$$T^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 \\ (-3+\frac{2}{a})x_1 + (1-\frac{1}{a})x_2 + \frac{1}{a}x_3 \\ \frac{2}{a}x_1 - \frac{1}{a}x_2 + \frac{1}{a}x_3 \end{pmatrix}$$

c

Det vides at følgende er gældene:

$$\mathbf{A}_a^3 - (a-1)\mathbf{A}_a^2 - a\mathbf{A}_a - a\mathbf{I} = \mathbf{O}$$

Omskriver udtrykket:

$$\mathbf{A}_a^2 - (a-1)\mathbf{A}_a - a - a\mathbf{A}_a^{-1} = \mathbf{O}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mathbf{A}_a^2 - (a-1)\mathbf{A}_a - a = a\mathbf{A}_a^{-1}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{1}{a}\mathbf{A}_a^2 - \frac{(a-1)}{a}\mathbf{A}_a - 1 = \mathbf{A}_a^{-1}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{1}{a}\mathbf{A}_a^2\mathbf{x} - \frac{(a-1)}{a}\mathbf{A}_a\mathbf{x} - \mathbf{x} = \mathbf{A}_a^{-1}\mathbf{x}$$

Og at følgene kan omskrives:

$$(T_a \circ T_a \circ T_a)(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_a^3\mathbf{x}$$

$$T_a^2(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_a^2\mathbf{x}$$

$$T_a(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_a\mathbf{x}$$

$$T_a^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_a^{-1}\mathbf{x}$$

Og derfra kan udtrykket omskrives yderligere

$$\frac{1}{a}\mathbf{A}_a^2\mathbf{x} - \frac{(a-1)}{a}\mathbf{A}_a\mathbf{x} - \mathbf{x} = \mathbf{A}_a^{-1}\mathbf{x}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$T_a^{-1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{a}(T_a \circ T_a)(\mathbf{x}) - \frac{(a-1)}{a}T_a(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$$

Da det oprindelige udtryk var gældende, må

$$T_a^{-1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{a}(T_a \circ T_a)(\mathbf{x}) - \frac{(a-1)}{a}T_a(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$$

derfor også være gældende.

d

For at bestemme en basis til $ker(T_0)$ sættes $a = 0$ i matricen A_a og fås på reduceret rækkeechelon:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 3r_1 + r_2 \to r_2 \leadsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r_1 + r_3 \to r_3 \leadsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$-r_2 + r_3 \to r_3 \leadsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} r_2 + r_1 \to r_1 \leadsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Her ses det, at x_3 er en fri variable og at alle løsninger til systemet kan opskrives til hvor $x_3 = t$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Og derfra kan en basis til $ker(T_0)$ aflæses til: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Hvor dimensionen er 1.

e

En basis for $ran(T_0)$ kan bestemmes ved at se på A_0 på reduceret rækkeechelon form ovenfor, og se, at kolonne 1 og 2 er pivotsøjler hvilket udgør en basis for $ran(T_0)$ for den originale matrice, altså en basis for

$$ran(T_0) : \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Hvilket er 2 dimensioner.

Opgave 2

a

For at bestemme $\mathbf{P}_{B\leftarrow C}$ opstilles 3 totalmatricer (dog samlet til 1) og venstre side føres på reduceret rækkeechelonform:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \mid & 0 \mid & 3 \end{array}\right] r_1 \leftrightarrow r_3 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$-r_1 + r_3 \to r_3 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right] - r_1 + r_4 \to r_4 \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] r_2 + r_3 \to r_3 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$-r_2 + r_4 \to r_4 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] - r_3 + r_4 \to r_4 \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Og derfra ses basisskiftmatricen

$$\mathbf{P}_{B\leftarrow C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

b

For at bestemme $\mathbf{P}_{C\leftarrow B}$ vides det, at det blot er den inverse til $\mathbf{P}_{B\leftarrow C}$, altså $\mathbf{P}_{B\leftarrow C}^{-1} = \mathbf{P}_{C\leftarrow B}$. Bestemmer derfor $\mathbf{P}_{B\leftarrow C}^{-1}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] -r_1 + r_2 \to r_2 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$r_2 + r_3 \to r_3 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] r_3 \cdot -1 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$2r_3 + r_2 \to r_2 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] -2r_3 + r_1 \to r_1 \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

Derfra ses det, at

$$\mathbf{P}_{B\leftarrow C}^{-1} = \mathbf{P}_{C\leftarrow B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

c

Bestemmer for hvilke talpar (a, b) vektoren $\mathbf{x} = \mathbf{u}_1 + a\mathbf{u}_2 + b\mathbf{u}_3$ ligger i planen $span\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$:
Omskriver først $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{u}_1 + a\mathbf{u}_2 + b\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - a + b \\ a \\ 1 \\ 1 + a + b \end{bmatrix}$$

Opstiller et ligningssystem og løser det:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & -2 & 1 - a + b \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 + a + b \end{array}\right] r_1 \leftrightarrow r_3 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 1 - a + b \\ 2 & 0 & 1 + a + b \end{array}\right] -r_1 + r_2 \to r_2 \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 0 & -2 & 1-a+b \\ 2 & 0 & 1+a+b \end{array}\right] -2r_1 + r_4 \rightarrow r_4 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 0 & -2 & 1-a+b \\ 0 & 0 & -1+a+b \end{array}\right]$$

$$2r_2 + r_3 \rightarrow r_3 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & -1+a+b \\ 0 & 0 & -1+a+b \end{array}\right]$$

Derfra ses det, at for alle talpar af (a, b) hvor $a + b = 1$ ligger vektoren $\mathbf{x} = \mathbf{u}_1 + a\mathbf{u}_2 + b\mathbf{u}_3$ i planen $span\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

d

Hvis linjen skærer i underrummet, må koordinaterne være lig hinanden i et punkt, og kan derfor opstille et ligningssystem for at bestemme det punkt:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & t+2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & t \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Løser systemet ved at få matricen på reduceret rækkeechelon form:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & t+2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & t \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] r_1 \leftrightarrow r_3 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & t+2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$-r_1 + r_3 \rightarrow r_3 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] -r_1 + r_4 \rightarrow r_4 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1-t \end{array}\right]$$

$$r_2 + r_3 \rightarrow r_3 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1-t \end{array}\right] -r_2 + r_4 \rightarrow r_4 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -t \end{array}\right]$$

$$-r_3 + r_4 \to r_4 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -t-3 \end{array}\right]$$

Derfra ses det, at $t = -3$ giver netop en løsningen til systemet, og derfor skærer linjen kun underrummmet i

$$-3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

For at bestemme $[\mathbf{x}]_B$ kan et ligningssytem oprettes:

$$t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 + t_3\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Løser systemet ved at få matricen på reduceret rækkeechelon form:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] r_1 \leftrightarrow r_3 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$-r_1 + r_3 \to r_3 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] - r_1 + r_4 \to r_4 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$r_2 + r_3 \to r_3 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] - r_2 + r_4 \to r_4 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$-r_3 + r_4 \to r_4 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dvs.

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

og derfor er $[x]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$[x]_C$ kan nemt bestemmes ved at gange $\mathbf{P}_{C \leftarrow B}$ på $[x]_B$:

$$[x]_C = \mathbf{P}_{C \leftarrow B}[x]_B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -10 \\ -7 \end{bmatrix}$$

e

Først kan et ligningssytem opstilles:

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 + t_3\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} t_1 - t_2 + t_3 \\ t_2 \\ t_1 \\ t_1 + t_2 + t_3 \end{bmatrix}$$

Det vides yderligere, at $V = \{(0, 0, x_3, x_4) \in R^4 | x_3, x_4 \in R\}$, som kan sættes lig $\mathbf{x}$:

$$\begin{bmatrix} t_1 - t_2 + t_3 \\ t_2 \\ t_1 \\ t_1 + t_2 + t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Derfra ses det, at $t_2 = 0$:

$$\begin{bmatrix} t_1 - t_2 + t_3 \\ t_2 \\ t_1 \\ t_1 + t_2 + t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 + t_3 \\ 0 \\ t_1 \\ t_1 + t_3 \end{bmatrix}$$

Og derfra ses det yderligere, at $t_1 + t_3 = 0 \iff t_1 = -t_3$, som kan bruges til at omskrive retningsvektoren:

$$\begin{bmatrix} t_1 + t_3 \\ 0 \\ t_1 \\ t_1 + t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t_3 + t_3 \\ 0 \\ t_1 \\ -t_3 + t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dvs. at når $t_1 = 0$, vil linjen gå igennem origo.

Opgave 3

a

Det ses, at rumskibet parallelforskydes med vektoren $\vec{CS} = \begin{pmatrix} s_1 - c_1 \\ s_2 - c_2 \end{pmatrix}$. Derfor ændres koordinaterne til

$$c_1^F = (s_1 - c_1) + c_1 = s_1$$

$$c_2^F = (s_2 - c_2) + c_2 = s_2$$

$$s_1^F = (s_1 - c_1) + s_1 = 2s_1 - c_1$$

$$s_2^F = (s_2 - c_2) + s_2 = 2s_2 - c_2$$

Herefter kan det bestemmes, hvad hver række skal være:
Række 1 skal give $c_1^F = s_1$:

$$c_1^F = s_1 = 0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + 1 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2$$

Række 2 skal give $c_2^F = s_2$:

$$c_2^F = s_1 = 0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + 0 \cdot s_1 + 1 \cdot s_2$$

Række 3 skal give $s_1^F = 2s_1 - c_1$:

$$s_1^F = 2s_1 - c_1 = -1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + 2 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2$$

Række 4 skal give $s_2^F = 2s_2 - c_2$:

$$s_2^F = 2s_2 - c_2 = 0 \cdot c_1 + -1 \cdot c_2 + 2 \cdot s_1 + 2 \cdot s_2$$

Dvs. matricen **F** kan bestemmes til

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Hvor dvs.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ 2s_1 - c_1 \\ 2s_2 - c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^F \\ c_2^F \\ s_1^F \\ s_2^F \end{bmatrix}$$

b

Først bestemmes vektoren $\begin{pmatrix} s_1^L \\ s_2^L \end{pmatrix}$ ift. c_1, c_2, s_1og s_2, da det er opgivet at

$$\begin{pmatrix} s_1^L \\ s_2^L \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 - c_1 \\ s_2 - c_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cos(\theta)(s_1 - c_1) - sin(\theta)(s_2 - c_2) \\ sin(\theta)(s_1 - c_1) + cos(\theta)(s_2 - c_2) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} c_1 + cos(\theta)(s_1 - c_1) - sin(\theta)(s_2 - c_2) \\ c_2 + sin(\theta)(s_1 - c_1) + cos(\theta)(s_2 - c_2) \end{bmatrix}$$

Da det yderligere vides, at $c_1^L = c_1$ og $c_2^L = c_2$ kan koordinaterne efter $\mathbf{L}_\theta$ er ganget på kan omskrives til

$$\begin{bmatrix} c_1^L \\ c_2^L \\ s_1^L \\ s_2^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_1 + cos(\theta)(s_1 - c_1) - sin(\theta)(s_2 - c_2) \\ c_2 + sin(\theta)(s_1 - c_1) + cos(\theta)(s_2 - c_2) \end{bmatrix}$$

Herefter kan formlen kontrolleres, ved at se om det giver samme udtryk som ovenfor:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 - cos(\theta) & sin(\theta) & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ -sin(\theta) & 1 - cos(\theta) & sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ (1-cos(\theta))c_1 + sin(\theta)c_2 + cos(\theta)s_1 - sin(\theta)s_2 \\ -sin(\theta)c_1 + (1-cos(\theta))c_2 + sin(\theta)s_1 + cos(\theta)s_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_1 + cos(\theta)(s_1 - c_1) - sin(\theta)(s_2 - c_2) \\ c_2 + sin(\theta)(s_1 - c_1) + cos(\theta)(s_2 - c_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^L \\ c_2^L \\ s_1^L \\ s_2^L \end{bmatrix}$$

Derfra ses det, at $\mathbf{L}_\theta$ er korrekt. Og det vides yderligere, at $\mathbf{L}_{-\theta} = \mathbf{R}_\theta$, som kan bruges til at kontrollere $\mathbf{R}_\theta$:

$$\mathbf{L}_{-\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-cos(-\theta) & sin(-\theta) & cos(-\theta) & -sin(-\theta) \\ -sin(-\theta) & 1-cos(-\theta) & sin(-\theta) & cos(-\theta) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-cos(\theta) & -sin(\theta) & cos(\theta) & sin(\theta) \\ sin(\theta) & 1-cos(\theta) & -sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} = \mathbf{R}_\theta$$

Og deraf er $\mathbf{R}_\theta$ også korrekt.

c

Tastkombinationen angivet svarer blot til at gange de tilhørende transformationsmatricer på koordinatvektoren:

$$\mathbf{L}_{20}\mathbf{L}_{20}\mathbf{L}_{20}\mathbf{F}\mathbf{F}\mathbf{R}_{20}\mathbf{R}_{20}\mathbf{F}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Udregnet ved brug af matrix multiplikations funktionen i python fra tidligere opgave A:

$$\mathbf{L}_{20}\mathbf{L}_{20}\mathbf{L}_{20}\mathbf{F}\mathbf{F}\mathbf{R}_{20}\mathbf{R}_{20}\mathbf{F}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,285 \\ 2,532 \\ 0,943 \\ 3,471 \end{bmatrix}$$

d

Det ses, at $20° \cdot 18 = 360°$, hvilket er antal grader på en cirkel. Så den drejer blot rumskibet en hel omgang, og derfor ændres rumskibets koordinatvektor ikke. Hvilket betyder, at $\mathbf{L}_{\theta}^{18}$ skal være identitsmatricen, for ikke at ændre positionen.